MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 13
10.07.2015

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2013*

   a) Zeien Sie, dass es genau eine bijektive affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

   $$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

   gibt.

   b) Zeigen Sie, dass f sogar eine Bewegung (d.h. abstandserhaltend) ist und bestimmen Sie den Typ dieser Bewegung.

   Hinweis: Benutzen Sie das Prinzip der affinen Abbildung um zu folgern, dass es genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den gewünschten Eigenschaften gibt. Bestimmen Sie diese Abbildung. Mit Hilfe von Bemerkung 12.5 aus dem Vorlesungsskript können Sie beweisen, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijektiv ist. In Teilaufgabe b) hilft Ihnen Bemerkung 12.9 aus dem Vorlesungsskript weiter.

2. *nach Staatsexamensaufgabe Herbst 2012*

   Bestimmen Sie alle affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f((1,0)) = (2,3)$ und $f((0,1)) = (-2,-2)$. Gibt es unter all diesen affinen Abbildungen eine Bewegung (d.h. eine Isometrie)?
   Hinweis: Die Matrix A der affinen Abbildung $f(x) = Ax+b$ kann für ein beliebiges $b = (b_1, b_2)^T \in \mathbb{R}^2$ so gewählt werden, so dass die obige Abbildungsvorschrift erfüllt ist. Die Matrix A hängt explizit von den Parametern b_1, b_2 ab. Zeigen Sie, dass für beliebiges $b \in \mathbb{R}^2$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht abstandserhaltend und somit auch keine Bewegung ist.

3. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2005*

Es seien $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $t \in \mathbb{R}^2$. Die affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x) = A\,x + t$$

sei eine Drehung der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Drehzentrum z.

a) Begründen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\|p - z\| = \|f(p) - z\|\,.$$

b) In $\mathbb{R}^2$ seien die folgenden vier Punkte gegeben:

$$p = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad q' = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es genau eine Drehung f um ein Drehzentrum $z \in \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f(p) = p' \qquad \text{und} \qquad f(q) = q'.$$

Berechnen Sie z, sowie die Matrix A und den Vektor t von f.

Hinweis: Die Drehmatrix A können Sie mit Hilfe der Abbildungsvorschrift eindeutig bestimmen. Sie sollten 2 Gleichungssystem für $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ erhalten, mit Hilfe dessen A eindeutig bestimmt werden kann. Anschließend können Sie t bestimmen. Das Drehzentrum z können Sie mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Formel berechnen.